بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المستوى: السنة الثالثة متوسط (3 م)

المقطع الأول: الأعداد النسبية، تقايس المثلثات

الكفاءة المستهدفة: يحلّ المتعلم مشكلات متعلقة بالأعداد النسبية و يوظف خواص متعلقة بالمثلثات (حالات تقايس مثلثين) .

هيكلة تعلّمات المقطع:

1. الأعداد النسبية :
   - (1) جمع و طرح عددين نسبيين، المجموع الجبري (تذكير)
   - (2) ضرب عددين نسبيين
   - (3) جداء عدة أعداد نسبية
   - (4) قسمة عددين نسبيين
2. تقايس المثلثات :
   - (1) مدخل
   - (2) الحالة الأولى
   - (3) الحالة الثانية
   - (4) الحالة الثالثة
   - (5) حالتا تقايس مثلثين قائمين
3. إدماج.

المورد المعرفي : **جمع و طرح عددين نسبيين (تذكير)** **الكفاءة المستهدفة** : أن يتذكر التلميذ طريقة جمع و طرح عددين نسبيين و حساب مجموع جبري.	**المستوى** : الثالث متوسط (3 م) **الوسائل التعليمية المستخدمة** : المنهاج.

مرحلة الانطلاق

تذكير :

❶ مفهوم العدد النسبي، الإشارة، المسافة إلى الصفر.

❷ العددان المتعاكسان.

مرحلة البناء

قاعدة (1) :

لجمع عددين نسبيين من نفس الإشارة، نجمع مسافتيهما إلى الصفر و نحتفظ بالإشارة المشتركة

أمثلة:

$-4,5+(-2,5)=-(4,5+2,5)=-7$ ؛ $7,5+(+1,8)=+(7,5+1,8)=+9,3=9,3$

قاعدة (2) :

لجمع عددين نسبيين مختلفين في الإشارة، نطرح مسافتيهما إلى الصفر و نحتفظ بإشارة العدد الأكبر مسافة إلى الصفر

أمثلة:

$-1,5+6,8=+(6,8-1,5)=+5,3=5,3$ ؛ $2,1+(+-8)=-(8-2,1)=-5,9$

قاعدة (3) :

مجموع عددين نسبيين متعاكسين يساوي الصفر.

أمثلة:

$-3,4+3,4=0$ ؛ $6,25+(-6,25)=0$

قاعدة (4) :

لطرح عدد نسبي، نضيف معاكسه (نحوّل الطرح إلى جمع المعاكس)

أمثلة:

$-2,5-(-7)=-2,5+7=7-2,5=4,5$ ؛ $1,2-5=1,2+(-5)=-(5-1,2)=-3,8$

المجموع الجبري هو سلسلة عمليات جمع و طرح على الأعداد النسبية)

مثال:

$$\begin{aligned}S &= 7-4,5+8-(-3,5)-9+(-6,5)\\ &= 7-4,5+8+3,5-9-6,5\\ &= 7+8+3,5-4,5-9-6,5\\ &= 18,5-20\\ S &= \boxed{-1,5}\end{aligned}$$

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق : احسب بتمعن المجاميع الجبرية التالية

$A=-5,1+6,3+(-4,2)+2,1$ ؛ $B=-7,1+(-3,6)-(+4,3)+3,60$ ؛ $C=-6+(-5)-4-(-3)$ ؛ $D=10+(-3)-(5-(-11))-(-6)$

الجواب : $A=-0,9$ ؛ $B=-11,4$ ؛ $C=-12$ ؛ $D=-3$.

المورد المعرفي : **جداء عددين نسبيين**
الكفاءة المستهدفة : تمكين التلميذ من تعيين جداء عددين نسبيين و التطبيق السليم لقاعدة الإشارات

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة.

مرحلة الانطلاق

تذكير : قاعدة جمع و طرح عددين نسبيين و المعاكس.

مرحلة البناء

الوضعية التعلمية

أكمل ما يلي :

① $(+2,4)\times(+5,2)=2,4\times\cdots=\cdots=+\cdots$.
$+12\times(+2,3)=\cdots$

جداء عددين نسبيين موجبين هو عدد ....

② $(+4)\times(-3,5)=4\times(-3,5)=(-3,5)+(-3,5)+(-3,5)+(-3,5)=\cdots$
$(-2)\times(+5)=\cdots$

جداء عددنسبي موجب و عدد نسبي سالب هو عدد ....

③ باستعمال الآلة الحاسبة، احسب :
$(-3,4)\times(-0,4)=\cdots$
$(-6)\times(-21,9)=\cdots$

جداء عددين نسبيين سالبين هو عدد **موجب**.

! يوزع المتعلمون على أفواج من تلميذين و يقوم أحدهما بإجراء الحسابات و الآخر بالتحقق من النتائج باستعمال الآلة مع تبادل الأدوار.

القاعدة : لحساب جداء عددين نسبيين، نضرب مسافتهما إلى الصفر ثمّ نطبق قاعدة الإشارات الآتية :
جداء عددين نسبيين لهما نفس الإشارة هو عدد نسبي **موجب**.
جداء عددين نسبيين مختلفين في الإشارة هو عدد نسبي **سالب**.

أمثلة :

$(-2)\times(-5)=+(2\times5)=+10$ ؛ $(+2)\times(+5)=+(2\times5)=+10$
$(-2)\times(+5)=-(2\times5)=-10$ ؛ $(-2)\times(+5)=-(2\times5)=-10$

خاصية : جداء عدد نسبي في العدد -1 يساوي معاكس هذا العدد النسبي.

أمثلة : $+7\times(-1)=-7$ ؛ $(-3)\times(-1)=+3$ ؛ $(-1)\times(+1,3)=-1,3$.

ملاحظة : لإنجاز العملية $(-7)\times(-3)$ بالحاسبة، نضغط (من اليسار إلى اليمين) على : $\boxed{3}\ \boxed{\pm}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{\pm}\ \boxed{=}$

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق 1 : تمرين 2 صفحة 14

(ا) $(-2,5)\times(+4)=-(2,5\times4)=-10$ (ب) $(+6,5)\times(-4)=-(6,5\times4)=-26$ (ج) $(-3,25)\times(-10)=+(3,25\times10)=+32,5$
(د) $(+8,6)\times(+0,1)=+(8,6\times0,1)=+0,86$ (هـ) $(-7,8)\times(+100)=-(7,8\times100)=-780$ (و) $(-10)\times(+5,25)=-(10\times5,25)=-52,5$

تطبيق 2 : حدد إشارة العدد x في كل حالة ثم احسبه

- $(+6)\times x=30$ ← الجداء موجب إذن للعاملين نفس الإشارة ؛ و بما أنّ $+6$ موجب فإنّ x موجب. $\boxed{x=+5}$
- $(-5)\times x=10$ ← الجداء موجب إذن للعاملين نفس الإشارة ؛ و بما أنّ -5 سالب فإنّ x سالب. $\boxed{x=-2}$
- $(+7,5)\times x=-37,5$ ← الجداء سالب إذن فالعاملان مختلفان في الإشارة ؛ و بما أنّ $+7,5$ موجب فإنّ x سالب. $\boxed{x=-5}$
- $(-1,5)\times x=-3,5$ ← الجداء سالب إذن فالعاملان مختلفان في الإشارة ؛ و بما أنّ $-1,5$ سالب فإنّ x موجب. $\boxed{x=+3}$
- $(+35)\times x=-17,5$ ← الجداء سالب إذن فالعاملان مختلفان في الإشارة ؛ و بما أنّ $+7,5$ موجب فإنّ x سالب. $\boxed{x=-0,5}$
- $(-0,1)\times x=1$ ← الجداء موجب إذن للعاملين نفس الإشارة ؛ و بما أنّ $-0,1$ سالب فإنّ x سالب. $\boxed{x=+10}$

واجب منزلي : تحقق من نتائج التطبيقات السابقة باستعمال الآلة الحاسبة.

المورد المعرفي : **جداء عدة أعداد نسبية**
الكفاءة المستهدفة : تمكين التلميذ من تعيين جداء عدة أعداد نسبية و التطبيق السليم لقاعدة الإشارات

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة.

مرحلة الانطلاق

تذكير : قاعدة جمع و طرح عددين نسبيين و المعاكس، قاعدة الإشارات في الضرب.

مرحلة البناء

الوضعية التعلمية

① احسب :

$D=(-1,5)\times(+4)\times(-3)\times(-5)$ ؛ $A=(+1,5)\times(+4)\times(+3)\times(+5)$

$E=(-1,5)\times(-4)\times(-3)\times(-5)$ ؛ $B=(-1,5)\times(+4)\times(+3)\times(+5)$

$C=(-1,5)\times(+4)\times(-3)\times(+5)$

② ما هو عدد العوامل السالبة في النتائج الموجبة ؟ و في النتائج السالبة ؟

③ حاول أن تتكهن إشارة الجداء $F=(-2)\times(+3)\times(-1,5)\times(-7)\times(-0,03)\times(-1)$ ؟
تحقق من الإجابة باستعمال الآلة الحاسبة.

! يوزع المتعلمون على أفواج من تلميذين و يقوم أحدهما بإجراء الحسابات و الآخر بالتحقق من النتائج باستعمال الآلة مع تبادل الأدوار.

① $A=\underbrace{(+1,5)\times(+4)}\times\underbrace{(+3)\times(+5)}=(+6)\times(+15)=+90$ ؛ $B=\underbrace{(-1,5)\times(+4)}\times\underbrace{(+3)\times(+5)}=(-6)\times(+15)=-90$

$C=\underbrace{(-1,5)\times(+4)}\times\underbrace{(-3)\times(+5)}=(-6)\times(-15)=+90$ ؛ $D=\underbrace{(-1,5)\times(+4)}\times\underbrace{(-3)\times(-5)}=(-6)\times(+15)=-90$

$E=\underbrace{(-1,5)\times(-4)}\times\underbrace{(-3)\times(-5)}=(+6)\times(+15)=+90$

② النتائج الموجبة هي A ، C و E . عدد العوامل السالبة فيها هو 0 ، 2 أو 4 . نلاحظ أنها أعداد زوجية.
النتائج السالبة هي B و D . عدد العوامل السالبة فيها هو 1 أو 3 . نلاحظ أنها أعداد فردية.

③ عدد العوامل السالبة في F هو 5 و هو عدد فردي ؛ إذن فالنتيجة تكون سالبة أي F سالب.

القاعدة : جداء عدة أعداد نسبية (غير معدومة) هو :
- عدد **موجب** إذا كان عدد العوامل السالبة (الإشارات) السالبة في الجداء **زوجياً** .
- عدد **سالب** إذا كان عدد العوامل (الإشارات) السالبة في الجداء **فردياً** .

مثال 1 : ما هي إشارة العدد $G=-6\times7\times(-8)\times(-9)$ ؟
في الجداء، توجد ثلاثة عوامل سالبة و 3 عدد فردي إذاً G سالب.
مثال 2 : ما هي إشارة العدد $H=2\times(-4)\times(-5)\times(-2,5)\times(-0,8)$ ؟
في الجداء، توجد أربعة عوامل سالبة و 4 عدد زوجي إذاً H موجب.

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق 1 : تمرين 10 صفحة 14

(ا) في الجداء، توجد ثلاثة عوامل سالبة و 3 عدد فردي إذاً A سالب. $A=6\times(-2)\times4\times(-1)\times(-3)=-(6\times2\times4\times1\times3)=-144$

(ب) في الجداء، توجد أربعة عوامل سالبة و 4 عدد زوجي إذاً B موجب. $B=-5\times(-3)\times(-7)\times4\times(-0,5)=+(5\times3\times7\times4\times0,5)=+210$

(ج) في الجداء، توجد ثلاثة عوامل سالبة و 3 عدد فردي إذاً C سالب. $C=5\times(-3)\times0,8\times(-9)\times(-11)=-(5\times3\times0,8\times9\times11)=-1188$

(د) في الجداء، توجد ثلاثة عوامل سالبة و 3 عدد فردي إذاً D سالب. $D=-1\times(+2)\times(-3)\times6\times(-8)=-(1\times2\times3\times6\times8)=-288$

(هـ) في الجداء، توجد أربعة عوامل سالبة و 4 عدد زوجي إذاً E موجب. $E=(-2)\times(-5)\times(-1)\times4\times(-9)=+(2\times5\times1\times4\times9)=+360$

تطبيق 2 : حدد إشارة جداء 379 عددا نسبيا غير معدوم من بينها 221 عددا موجبا.

عدد العوامل السالبة هو $379-221=158$ و 158 عدد زوجي و بالتالي فالجداء موجب.

تطبيق 3 : تمرين 39 صفحة 18.

عدد العوامل السالبة هو ضِعف عدد العوامل الموجبة هذا يعني أن عدد العوامل السالبة هو عدد زوجي إذاً فالجداء موجب.

المورد المعرفي : قسمة عددين نسبيين
الكفاءة المستهدفة : تمكن التلميذ من تعيين حاصل قسمة عددين نسبيين و التطبيق السليم لقاعدة الإشارات.

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة.

مرحلة الانطلاق

تذكير : قاعدة جمع و طرح عددين نسبيين و المعاكس، قاعدة الإشارات في الضرب.

مرحلة البناء

الوضعية التعلمية 4 صفحة 9

① (أ) • $4 \times \boxed{8} = 32$ • $(-5) \times \boxed{(-12)} = 60$ • $7 \times \boxed{(-4)} = -28$ • $\boxed{14} \times (-3) = -42$

(ب) • $8 = 32 \div 4$ • $-12 = 60 \div (-5)$ • $-4 = -28 \div 7$ • $14 = -42 \div (-3)$

② نلاحظ أن حاصل قسمة عددين نسبيين من نفس الإشارة هو عدد موجب و حاصل قسمة عددين مختلفين في الإشارة هو عدد سالب.

③ (أ) بسط العبارة Q سالب لأن فيه 3 عوامل سالبة و 3 عدد فردي.
مقام العبارة Q موجب لأن فيه عاملين سالبين و 2 عدد زوجي.
(ب) العبارة Q هي حاصل قسمة عددين مختلفين في الإشارة و بالتالي فهي سالبة.
نلاحظ أن عدد العوامل السالبة في العبارة Q هو 5 و هو عدد فردي.

! يوزع المتعلمون على أفواج من تلميذين و يقوم أحدهما بإجراء الحسابات و الآخر بالتحقق من النتائج باستعمال الآلة مع تبادل الأدوار.

القاعدة 1 : حاصل قسمة العدد النسبي a على العدد النسبي غير المعدوم b هو العدد x الذي يحقق المساواة : $a \times x = b$ أي $x = \frac{a}{b}$ مع $b \neq 0$.

ملاحظة 1 : $\frac{b}{b} = 1$ ، $\frac{0}{b} = 0$ و $\frac{a}{1} = a$.

القاعدة 2 : لإيجاد حاصل قسمة عدد نسبي على عدد نسبي غير معدوم، نقسم مسافتيهما إلى الصفر ثمّ نطبق قاعدة الإشارات التالية :
- حاصل قسمة عددين نسبيين من **نفس الإشارة** هو **عدد موجب**.
- حاصل قسمة عددين نسبيين **مختلفين في الإشارة** هو **عدد سالب**.

ملاحظة 2 : قاعدة الإشارات بالنسبة إلى القسمة هي نفس القاعدة التي في الضرب.

مثال 1 : جِد قيمة $K = (+65) \div (-5)$.
K هو حاصل قسمة عددين نسبيين مختلفين في الإشارة و بالتالي K سالب . $K = -(65 \div 5) = -13$

مثال 2 : ما هي الكتابة العشرية للعدد $L = (-30) \div (-4)$ ؟
العدد L موجب لأنه حاصل قسمة عددين نسبيين من نفس الإشارة (سالبان). $L = +(30 \div 4) = 7{,}5$

ملاحظة 3 : حاصل قسمة عددين نسبيين لا يكون دائما عددا نسبيا. مثلاً، عند قسمة -11 على 6 لا نجد عددا نسبيا.
في هذه الحالة نكتفي بإعطاء قيمة تقريبية لحاصل القسمة و نكتب : $(-11) \div 6 \approx -1{,}83$.

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق 1 : تمرين 25 صفحة 16

(أ) $(-8) \div (-4) = +(8 \div 4) = +2$ (ب) $(-5) \div (+10) = -(5 \div 10) = -0{,}5$ (ج) $(-15) \div (-3) = +(15 \div 3) = +5$

(د) $20 \div (-5) = -(20 \div 5) = -4$ (هـ) $(-45) \div (-9) = +(45 \div 9) = +5$ (و) $(-72) \div (+8) = -(72 \div 8) = -9$

تطبيق 2 :

① احسب : $a = 11 \times (-3)$ ؛ $b = (-5) \times (-2)$ ؛ $c = 9 \times (-2) \times 11$ ؛ $d = \underbrace{(-1) \times (-1) \times \cdots \times (-1)}_{\text{99 مرة}}$

② استنتج قيم الأعداد التالية : $A = a + b$ ، $B = d - c$ ، $C = (c \times d) + (a \times b)$ ، $D = (a - b - d) - (c - 90d - a)$

الأجوبة :

① $a = -33$ ، $b = +10$ ، $c = -198$ ، $d = -1$ (عدد العوامل السالبة هو 99 و هو عدد فردي) .

② $A = -23$ ، $B = +197$ ، $C = -132$ ، $D = +33$.

المورد المعرفي : **تقايس المثلثات (مدخل)**
الكفاءة المستهدفة : أن يتعرف التلميذ على المثلثين المتقايسين.

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير :

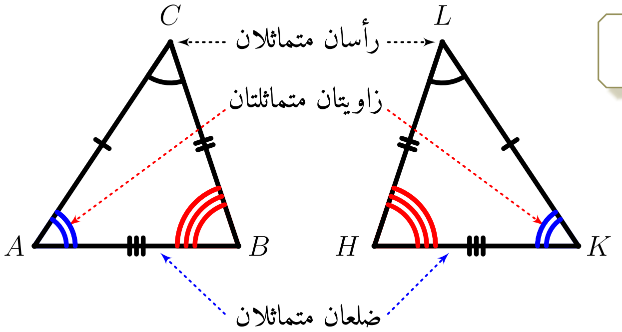
❶ خواص التناظر المحوري و التناظر المركزي.

❷ بعض خواص متوازي الأضلاع.

مرحلة البناء

1) تعريف :

المثلثان المتقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق.



أمثلة:

- المثلثان المتناظران بالنسبة إلى نقطة أو إلى مستقيم هما مثلثان متقايسان.
- المثلثان اللذان لهما نفس الأطوال و نفس أقياس الزوايا هما مثلثان متقايسان.

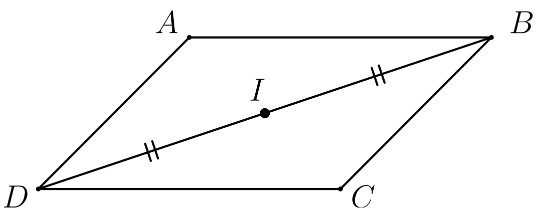
2) العناصر المتماثلة : في المثلثين المتقايسين :

- كل ضلعين متقايسين هما ضلعان متماثلان.
- كل زاويتين متقايستين هما زاويتان متماثلتان.

مثال :

$ABCD$ متوازي الأضلاع و I منتصف قطره $[BD]$.

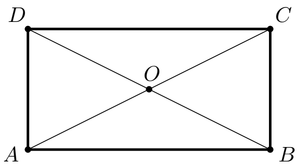
بما أنّ I مركز تناظر لمتوازي الأضلاع $ABCD$ فإنّ المثلثين ABD و BCD متناظران بالنسبة إلى I و بالتالي متقايسان. من تقايسهما نستنتج تقايس العناصر المتماثلة الآتية :



الأضلاع	الزوايا
$[AB]$ و $[CD]$	$\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$
$[BC]$ و $[AD]$	$\widehat{ABD}$ و $\widehat{BDC}$
$[BD]$ و $[BD]$ (ضلع مشترك)	$\widehat{CBD}$ و $\widehat{ADB}$

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق : $ABCD$ مستطيل.
اشرح لماذا المثلثان ABC و ABD متقايسان.



- لدينا من جهة (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى) :
  - في متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين متقايسان إذاً $AD = BC$.
  - قطرا المستطيل متقايسان و بالتالي $BD = AC$.
  - $[AB]$ ضلع مشترك.
- و من جهة أخرى (تقايس الزوايا مثنى مثنى) :
  - $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90°$.
  - قطرا المستطيل متناصفان و متقايسان منه $OB = OA$ و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه الأساسي O و بالتالي $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
  - المثلث OBC متساوي الساقين رأسه الأساسي O و بالتالي $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$. و بما أنّ $\widehat{OBC} = \widehat{ODA}$ (متبادلتان داخليا) فنستنتج أنّ $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

أضلاع المثلثان ABC و ABD متقايسان مثنى مثنى و زواياهما أيضا، نستنتج إذاً أنهما مثلثان متقايسان.

ملاحظة : يمكن ملاحظة أنّ هذين المثلثين متناظران بالنسبة إلى محور الضلع $[AB]$ و بالتالي فهما متقايسان.

للمنزل : مراجعة العناصر التالية

❶ **المتباينة المثلثية:** في المثلث، طول الضلع الأطول أصغر من مجموع طولَيْ الضلعين الآخرين.

❷ مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي $180°$.

❸ إنشاء مثلثات في حالات مختلفة.

مرحلة الانطلاق

تذكير : المثلثان المتقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق.

مرحلة البناء

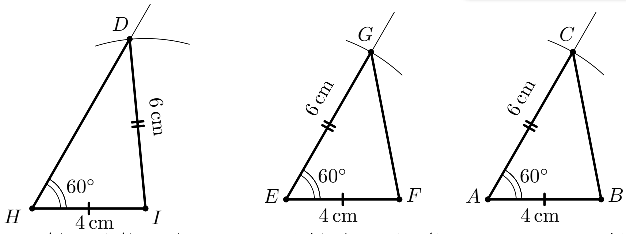
الوضعية التعلمية

أنشئ المثلثات التالية :

- $AB = 4\text{cm}$ ، $AC = 6\text{cm}$ و $\widehat{A} = 60°$.
- $EF = 4\text{cm}$ ، $EG = 6\text{cm}$ و $\widehat{E} = 60°$.
- $HI = 4\text{cm}$ ، $ID = 6\text{cm}$ و $\widehat{H} = 60°$.

❶ هل المثلثان ABC و EFG متقايسان ؟
❷ هل المثلثان ABC و DHI متقايسان ؟
❸ ما أوجه التشابه أو الاختلاف بين هذه الحالات ؟

يوزع المتعلمون على أفواج من ثلاثة تلاميذ و يقوم كل منهم بإنشاء إحدى المثلثات الثلاث على ورقة بيضاء و قصه، ثم يجيبون على الأسئلة بمقارنة الأشكال.



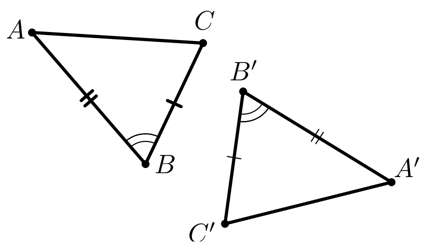
(ا) نلاحظ أنّ المثلثين ABC و EFG متقايسان (قابلان للتطابق) .
(ب) نلاحظ أنّ المثلث DHI لا يُقايس المثلث ABC (ليسا قابلين للتطابق) .

في الحالة (ا)، ضلعان من المثلث EFG يقايسان ضلعين من المثلث ABC و الزاوية المحصورة بين هذه الضلعين في المثلث EFG تقايس الزاوية المحصورة بين الضلعين المماثلين في المثلث ABC . لكن في الحالة (ب)، الزاوية $\widehat{H}$ في المثلث DHI و التي تقايس الزاوية $\widehat{A}$ في المثلث ABC ليست محصورة بين الضلعين الذين يقايسان ضلعين في المثلث ABC .

حتى يتقايس مثلثان، يكفي أن يتقايس ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما في أحدهما مع ضلعين و الزاوية المحصورة بينهما في الآخر.

مثال : في الشكل المقابل لدينا :

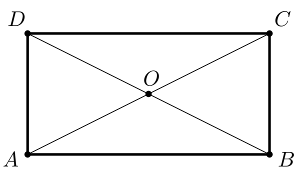
$$\begin{bmatrix} BA = B'A' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{bmatrix}$$ إذن $\begin{bmatrix} \text{فالمثلثان} \\ ABC \text{ و } A'B'C' \\ \text{متقايسان} \end{bmatrix}$.



ملاحظة : نتحدّث عن تقايس مثلثين و ليس تساويهما و بالتالي لا نكتب $\cancel{ABC = A'B'C'}$.

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق 1 : ارسم مستطيلا $ABCD$ مركزه O ثم أنشئ قطريه.
عيّن كل المثلثات المتقايسة في هذا المستطيل.

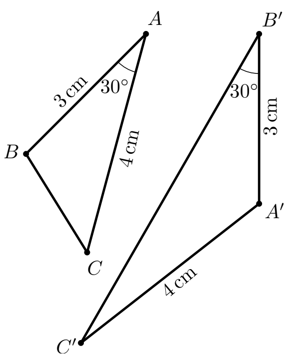


المثلثات المتقايسة :
AOB و COD متقايسان.
AOD و COB متقايسان.
ABC ، ABD ، ACD و BCD متقايسة كلها.

تطبيق 2 :
❶ أنشئ مثلثا ABC بحيث $\widehat{A} = 30°$ ، $AB = 3\text{cm}$ و $AC = 4\text{cm}$.
❷ أنشئ مثلثا $A'B'C'$ بحيث $\widehat{B'} = 30°$ ، $A'B' = 3\text{cm}$ و $A'C' = 4\text{cm}$.
❸ هل المثلثان ABC و $A'B'C'$ متقايسان ؟ علِّل.

المثلثان ABC و $A'B'C'$ ليسا متقايسين:
لدينا ضلعان من المثلث ABC يقايسان ضلعين من المثلث $A'B'C'$ و الزاوية المحصورة بينهما في المثلث ABC تقايس زاوية غير تلك المحصورة بين الضلعين في المثلث ABC .

(لو كانا متقايسين لكان لدينا : $AB = A'B'$، $AC = A'C'$ ، $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ، ... إلخ .
لكن $\widehat{A}$ زاوية حادة و $\widehat{A'}$ زاوية منفرجة ...).



المورد المعرفي : الحالة الثانية لتقايس مثلثين
الكفاءة المستهدفة : أن يتعرف التلميذ على الحالة الثانية لتقايس مثلثين و أن يتمكن من توظيفها في براهين بسيطة

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير : الحالة الأولى لتقايس مثلثين.

مرحلة البناء

الوضعية التعلمية

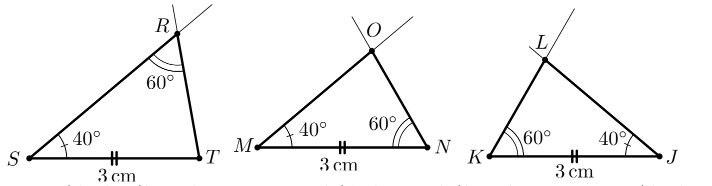
أنشئ المثلثات التالية :

- $\widehat{J}=40°$ ، $\widehat{K}=60°$ و $KJ=3\text{cm}$.
- $\widehat{M}=40°$ ، $\widehat{N}=60°$ و $MN=3\text{cm}$.
- $\widehat{S}=40°$ ، $\widehat{R}=60°$ و $ST=3\text{cm}$.

❶ هل المثلثان LKJ و MNO متقايسان ؟
❷ هل المثلثان LKJ و RST متقايسان ؟
❸ ما أوجه التشابه أو الاختلاف بين هذه الحالات ؟

يوزع المتعلمون على أفواج من ثلاثة تلاميذ و يقوم كل منهم بإنشاء إحدى المثلثات الثلاث على ورقة بيضاء و قصه، ثم يجيبون على الأسئلة بمقارنة الأشكال.

ملاحظة : لإنشاء النقطة R يمكن :
① أن نبدأ بالزاوية $\widehat{S}=40°$ ثم الزاوية $\widehat{T}=80°$ و النقطة R هي نقطة تقاطع ضلعيهما،
② أن ننشئ الزاوية $\widehat{S}$ و نعين نقطة R' على الضلع الذي لا يشمل النقطة T ثم نرسم الزاوية $\widehat{R'}=60°$ (نحو النقطة T) و بعدها نرسم المستقيم الذي يشمل T و يوازي ضلع الزاوية $\widehat{R'}$ الذي لا يشمل S فيقطع (SR') في النقطة R .



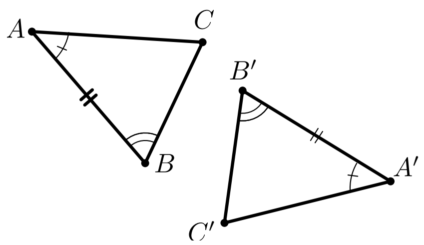
(ا) نلاحظ أنّ المثلثين LKJ و MNO متقايسان (قابلان للتطابق) .
(ب) نلاحظ أنّ المثلث RST لا يُقايس المثلث LKJ (ليسا قابلين للتطابق) .

في الحالة (ا)، زاويتان من المثلث MNO تقايسان زاويتين من المثلث LKJ و الضلع المحصور بين هاتين الزاويتين في المثلث MNO يقايس الضلع المحصور بين الزاويتين المماثلتين في المثلث LKJ . لكن في الحالة (ب)، الضلع ST في المثلث RST و الذي يقايس الضلع KJ في المثلث LKJ ليس محصورا بين الزاويتين اللتين تقايسان زاويتين في المثلث LKJ .

حتى يتقايس مثلثان، يكفي أن تتقايس زاويتان و الضلع المحصور بينهما في أحدهما مع زاويتين و الضلع المحصور بينهما في الآخر.

مثال : في الشكل المقابل لدينا :

$$\left[\begin{array}{c}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ AB=A'B'\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right] \text{ إذن } \left[\begin{array}{c}\text{فالمثلثان}\\ ABC \text{ و } A'B'C'\\ \text{متقايسان}\end{array}\right].$$



ملاحظة : نتحدّث عن تقايس مثلثين و ليس تساويهما و بالتالي لا نكتب ~~$ABC = A'B'C'$~~ .

مرحلة إعادة الاستثمار

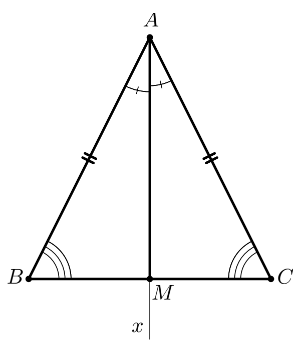
تطبيق : ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A . $[Ax)$ منصّف الزاوية $\widehat{A}$ يقطع $[BC]$ في M .
برهن بطريقتين أنّ المثلثين ABM و ACM متقايسان.

الطريقة الأولى : (زاويتان و الضلع المحصور بينهما)

لدينا : $\left[\begin{array}{c}\widehat{BAM}=\widehat{CAM}\\ AB=AC\\ \widehat{B}=\widehat{C}\end{array}\right]$ إذن $\left[\begin{array}{c}\text{المثلثان}\\ ABM \text{ و } ACM\\ \text{متقايسان}\end{array}\right]$.

الطريقة الثانية : (ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما)

لدينا : $\left[\begin{array}{c}[AM] \text{ ضلع مشترك}\\ \widehat{BAM}=\widehat{CAM}\\ AB=AC\end{array}\right]$ إذن $\left[\begin{array}{c}\text{المثلثان}\\ ABM \text{ و } ACM\\ \text{متقايسان}\end{array}\right]$.



المورد المعرفي : **الحالة الثالثة لتقايس مثلثين**
الكفاءة المستهدفة : أن يتعرف التلميذ على الحالة الثالثة لتقايس مثلثين و أن يتمكن من توظيفها في براهين بسيطة

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير : الحالتان الأولى و الثانية لتقايس مثلثين.

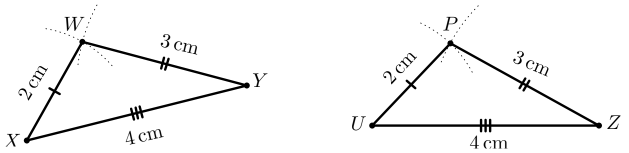
مرحلة البناء

الوضعية التعلمية

أنشيء المثلثين :
- $PU = 2cm$ ، $PZ = 3cm$ و $UZ = 4cm$.
- $WX = 2cm$ ، $WY = 3cm$ و $XY = 4cm$.

قارن بين المثلثين PUZ و WXY . هل هما متقايسان

! يوزع المتعلمون على أفواج من تلميذين و يقوم كل منهم بإنشاء أحد المثلثين على ورقة بيضاء و قصه. ثم يجيبون على الأسئلة بمقارنة الأشكال.

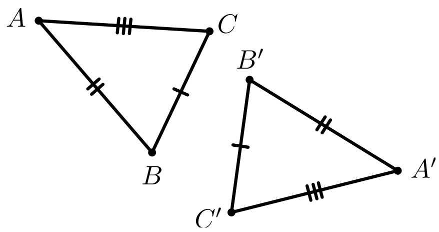


نلاحظ أنّ المثلثين PUZ و WXY متقايسان (قابلان للتطابق) حيث يقايس كل ضلع من المثلث PUZ ضلعاً من المثلث WXY .
من تقايسهما، نستنتج تقايس العناصر المتماثلة الآتية :
$WX = PU$ ؛ $WY = PZ$ ؛ $XY = UZ$ ؛ $\widehat{W} = \widehat{P}$ ؛ $\widehat{X} = \widehat{U}$ ؛ $\widehat{Y} = \widehat{Z}$.

حتى يتقايس مثلثان، يكفي أن يُقايس كل ضلع من أحدهما ضلعاً من الآخر.

مثال : في الشكل المقابل لدينا :

$$\left[\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right] \text{ إذن } \left[\begin{array}{c} \text{المثلثان} \\ ABC \text{ و } A'B'C' \\ \text{متقايسان} \end{array}\right].$$



! ملاحظة : نتحدث عن تقايس مثلثين و ليس تساويهما و بالتالي لا نكتب $\cancel{ABC = A'B'C'}$.

الخلاصة

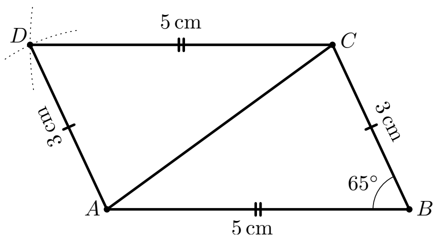
حتى يتقايس مثلثان، يكفي :
- أن يتقايس ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما في أحدهما مع ضلعين و الزاوية المحصورة بينهما في الآخر.
- أو أن تتقايس زاويتان و الضلع المحصور بينهما في أحدهما مع زاويتين و الضلع المحصور بينهما في الآخر.
- أو أن يُقايس كل ضلع من أحدهما ضلعاً من الآخر.

! لا يكفي أن تُقايس كل زاوية من مثلث ما زاويةً من مثلث آخر حتى يتقايس المثلثان !

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق : ارسم مثلثين ABC و ACD يشتركان في الضلع $[AC]$ بحيث $AB = CD = 5cm$ ، $\widehat{B} = 65°$ و $AD = BC = 3cm$.
برهن أنّ المثلثين ABC و ACD متقايسان.

مراحل الإنشاء :
(ا) نرسم الضلع $[AB]$
(ب) ثم الزاوية $\widehat{B}$
(ج) بعدها الضلعين $[BC]$ و $[AC]$
(د) و في الأخير، الضلعين $[AD]$ و $[CD]$ (بالمدور) .



لدينا : $$\left[\begin{array}{c} AB = CD \\ [AC] \text{ ضلع مشترك} \\ BC = AD \end{array}\right] \text{ إذن } \left[\begin{array}{c} \text{المثلثان} \\ ABC \text{ و } ACD \\ \text{متقايسان} \end{array}\right].$$

! **ملاحظة** : في الرباعي $ABCD$ كل ضلعين متقابلين متقايسان و بالتالي فهو متوازي الأضلاع.

المورد المعرفي : **حالتا تقايس مثلثين قائمين**

الكفاءة المستهدفة : أن يتعرف التلميذ على حالتَيْ تقايس مثلثين قائمين و أن يتمكن من توظيفها في براهين بسيطة

المستوى : الثالث متوسط (3 م)

الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الكتاب المدرسي، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير : الحالات الثلاث لتقايس مثلثين.

مرحلة البناء

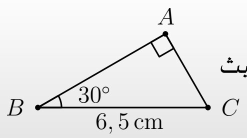
الوضعية التعلمية 1

الشكل المقابل مثلث قائم في A.

① أنشيء مثلثا MNP قائما في M بحيث $NP = BC$ و $\widehat{N} = \widehat{B}$.

② بين أنّ $\widehat{P} = \widehat{C}$.

③ استنتج أنّ المثلثين ABC و MNP متقايسان.



لدينا $\widehat{C} = 90° - \widehat{B} = 60°$ و $\widehat{P} = 90° - \widehat{N} = 60°$ منه $\widehat{P} = \widehat{C}$.

لدينا إذاً $\widehat{N} = \widehat{B}$ ، $NP = BC$ و $\widehat{P} = \widehat{C}$ نستنتج أنّ المثلثين ABC و MNP متقايسان (زاويتان و الضلع المحصور بينهما).

حتى يتقايس مثلثان قائمان، يكفي أن يتقايس وتراهما و أن تتقايس زاوية حادة في أحدهما مع زاوية حادة في الآخر.

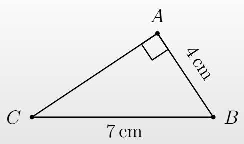
الوضعية التعلمية 2

الشكل المقابل مثلث قائم في A.

① ارسم زاوية قائمة $\widehat{xEy}$ و عيّن على الضلع $[Ex)$ نقطة F بحيث $EF = AB$.

② عيّن نقطة G على الضلع $[Ey)$ بحيث $FG = BC$.

③ تحقق بالمدور من أنّ $EG = AC$ و استنتج أنّ المثلثين ABC و EFG متقايسان.



المثلثان ABC و EFG متقايسان لأن أضلاعهما متقايسة مثنى مثنى.

حتى يتقايس مثلثان قائمان، يكفي أن يتقايس وتراهما و أن يتقايس ضلع قائم في أحدهما مع ضلع قائم في الآخر.

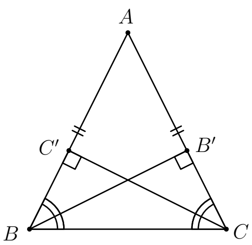
ملاحظة : يمكن تطبيق حالات تقايس مثلثين كيفيين لإثبات تقايس مثلثين قائمين (إذا لم يُعطَ الوتران).

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق 1 :

① ارسم مثلثا ABC متساوي الساقين رأسه الأساسي A ثم أنشيء النقطتين B' و C' ، المسقطين العموديين للنقطتين B و C على الضلعين $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.

② برهن أنّ المثلثين $BB'C$ و BCC' متقايسان و استنتج أنّ $BB' = CC'$.

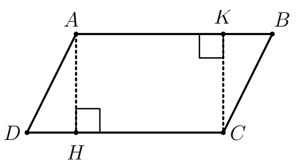


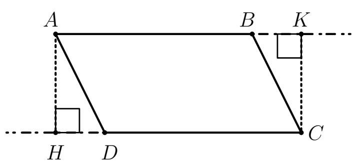
المثلثان القائمان $BB'C$ و BCC' متقايسان لأنّ الوتر $[BC]$ مشترك و $\widehat{CBC'} = \widehat{BCC'}$ (زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متقايستان).

من تقايسهما نستنتج أنّ $BB' = CC'$ (و $BC' = CB'$ ؛ $\widehat{CBB'} = \widehat{BCC'}$).

تطبيق 2 : $ABCD$ متوازي الأضلاع، H و K المسقطان العموديان للنقطتين A و C على المستقيمين (CD) و (AB) على الترتيب.

بيّن أنّ $DH = BK$.

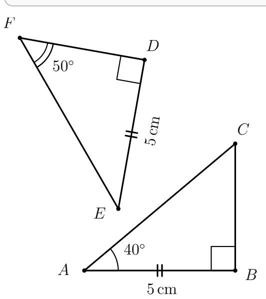




المثلثان القائمان ADH و BCK متقايسان لأنّ $AD = BC$ (ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع) و $AH = CK$ (الارتفاع المتعلق بالقاعدة $[CD]$).

من تقايسهما نستنتج أنّ $BK = DH'$

تطبيق 3 : تمرين 7 صفحة 142



لدينا : $\widehat{E} = 90° - \widehat{F} = 90° - 50° = 40°$

و بالتالي : $\begin{bmatrix} \widehat{A} = \widehat{E} = 90° \\ AB = DE = 5\text{cm} \\ \widehat{B} = \widehat{D} = 90° \end{bmatrix}$ منه $\begin{bmatrix} \text{فالمثلثان} \\ ABC \text{ و } DEF \\ \text{متقايسان} \end{bmatrix}$ (زاويتان و الضلع المحصور بينهما).

المورد المعرفي : **إدماج جزئي**
الكفاءة المستهدفة : توظيف الأعداد النسبية و حالات تقايس مثلثين في براهين بسيطة

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير : العمليات على الأعداد النسبية، الحالات الثلاث لتقايس مثلثين كيفيين، حالتا تقايس مثلثين قائمين.

مرحلة البناء

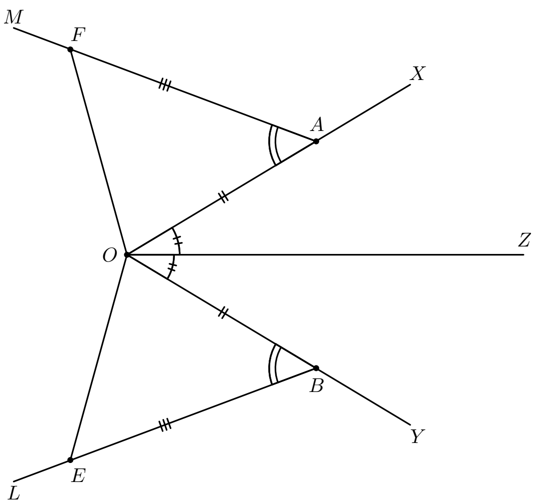
تمرين 1 : تمرين 52 صفحة 19

①

المرحلة	من أجل 10	من أجل -5	من أجل -125	من أجل x
اختر عددا	10	-5	-125	x
أضف له العدد الصحيح الذي يليه	$10+11=21$	$(-5)+(-4)=-9$	$(-125)+(-124)=-249$	$x+x+1=2x+1$
اضرب الناتج في (-2)	$21\times(-2)=-42$	$(-9)\times(-2)=18$	$(-249)\times(-2)=498$	$(2x+1)\times(-2)=-4x-2$
أضف 2 إلى الناتج	$(-42)+2=-40$	$18+2=20$	$498+2=500$	$-4x-2+2=-4x$
قسّم الناتج على (-4)	$(-40)\div(-4)=10$	$20\div(-4)=-5$	$500\div(-4)=-125$	$(-4x)\div(-4)=x$

مخمنة : في هذا البرنامج ، نحصل دائما في الأخير على العدد الذي اخترناه في البداية.

② **الإثبات** : إذا كان x العدد الذي نختاره في البداية فإن نتيجة الحساب في الأخير هي x (انظر العمود الأخير من الجدول).



تمرين 2 : $\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA=OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO}=\widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F\in[AM]$ ، $E\in[BL]$ و $AF=BE$.
① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE}=\widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

① لدينا :
- $AF=BE$ ،
- $OA=OB$ ،
- $\widehat{FAO}=\widehat{EBO}$

إذاً فالمثلثان FAO و OBE متقايسان (الحالة الأولى : ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما) .

② من تقايس المثلثين FAO و OBE نستنتج العناصر المتماثلة الآتية : $FO=EO$ ، $\widehat{OFA}=\widehat{OEB}$ و $\boxed{\widehat{AOF}=\widehat{BOE}}$.

③ لكي نبيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$ يكفي أن نثبت أنّ $\widehat{FOB}=\widehat{EOB}$. لكن :
- $\widehat{AOZ}=\widehat{BOZ}$ ،
- $\widehat{FOA}=\widehat{EOB}$

منه $\widehat{FOA}+\widehat{AOZ}=\widehat{EOB}+\widehat{BOZ}$ أي $\widehat{FOZ}=\widehat{EOZ}$

و هذا يعني تماما أنّ الزاويتين المتجاورتين $\widehat{FOZ}$ و $\widehat{EOZ}$ متقايستان منه $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

تمرين 2 :

$\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA = OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO} = \widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F \in [AM]$ ، $E \in [BL]$ و $AF = BE$.

① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE} = \widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

تمرين 2 :

$\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA = OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO} = \widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F \in [AM]$ ، $E \in [BL]$ و $AF = BE$.

① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE} = \widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

تمرين 2 :

$\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA = OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO} = \widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F \in [AM]$ ، $E \in [BL]$ و $AF = BE$.

① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE} = \widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

تمرين 2 :

$\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA = OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO} = \widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F \in [AM]$ ، $E \in [BL]$ و $AF = BE$.

① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE} = \widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

تمرين 2 :

$\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA = OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO} = \widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F \in [AM]$ ، $E \in [BL]$ و $AF = BE$.

① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE} = \widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

تمرين 2 :

$\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA = OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO} = \widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F \in [AM]$ ، $E \in [BL]$ و $AF = BE$.

① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE} = \widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

تمرين 2 :

$\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA = OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO} = \widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F \in [AM]$ ، $E \in [BL]$ و $AF = BE$.

① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE} = \widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.

تمرين 2 :

$\widehat{XOY}$ زاوية حادة و $[OZ)$ منصفها.
A و B نقطتان من الضلعين $[OX)$ و $[OY)$ على الترتيب بحيث $OA = OB$.
خارج الزاوية $\widehat{XOY}$ ، أنشئ الزاويتين $\widehat{MAO}$ و $\widehat{OBL}$ بحيث $\widehat{MAO} = \widehat{OBL}$ ، و عيّن النقطتين E و F بحيث $F \in [AM]$ ، $E \in [BL]$ و $AF = BE$.

① قارن بين المثلثين FAO و OBE .
② بيّن أنّ $\widehat{BOE} = \widehat{AOF}$.
③ بيّن أنّ $[OZ)$ منصّف الزاوية $\widehat{FOE}$.